

●大学受験数学のための  
Mathematica 講座

【使い方】

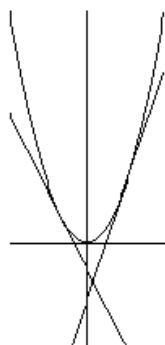
私にとって一番重要な使い道はグラフをかき、それをイラストレータにとりこんで加工することです。なお、Mathematica はパレットから選ぶ方法もありますが、Mathematica のバージョンが違うファイルをもらうとうまく動かなかったりしますので、私はすべてコマンドで打ち込んでいきます。大学受験数学に必要なコマンドは多くはありません。

(1) 平面グラフを描く

```
f[t_,u_] :=Plot[{x^2,2t x-t^2,2u x-u^2},
{x,-3,3},PlotPoints->100,
PlotRange->{{-3,3},{-4,9}},
AspectRatio->Automatic,Ticks->None];
```

として「シフトキーとエンターキー」を押す（これを以下「エンターする」と表現します）と、何も起きません。当たり前です。これは曲線  $y = x^2$  と、 $x = t$  における接線、 $x = u$  における接線を描く関数を定義しただけで、接点を与える  $t, u$  を具体的に指定しないと描きません。矢印はマイナスと不等号で打ち込むと自動で変換します。

```
g = f[-1,1.5]
としてエンターすると、
```



を描きます。イラストレータの項では放物線に後で接線を描き加えましたが、本当はそういうことをせず、ここではすべての曲線を描いておきます。接点の座標を与える  $t$ ,  $u$  を変数にしたのは見栄えのよいところを試行錯誤するためです。ここで基本の説明をしていると図のファイルから離れてしまうので、先にイラストレータ用のファイルの作り方を書きます。

## (2) イラストレータ用の図のファイルを作る

イラストレータを使うつもりがない人はここを読みとばしてください。イラストレータを使うつもりの方はここを読む前に、先にイラストレータの項を見てください。

グラフがうまく表示できたら Mathematica のファイルを保存します。2014-東大-1.nb のように、日本語で名前を付けることができます。次に eps ファイルの書き出しをします。方法は2つありますが、Mac 版の Mathematica の version9 はどちらの方法でもうまくいかないという、呆れたバグがあります。バグレポートを出してあり、Wolfram も確認していますが、いまだにバグフィックス版を出していません。Windows 版はバージョンアップをしていないので、どうなっているか、不明です。Mac 版の場合は、version7 以前で行ってください。表示されたグラフをマウスでコチッと選択し、メニューから、ファイル〜選択範囲の形式保存を選び、フォーマットを eps にして、名前を適当につけて、保存ボタンを押します。もう1つの方法は、コマンドライン

```
Export[FileNameJoin[{NotebookDirectory[], "g.eps"}], g]
```

で export する方法です。ver7 はこの方法はバグだそうです。ですから ver7 以前で、「選択範囲の形式保存」で行ってください。

Windows 版でも同じです。今は zu と名をつけ OK を押すと



ができます。Mathematica も MathType も上のようなアイコンの eps ファイルを作り出します。

できたファイルを、ダブルクリックするとイラストレータが立ち上がってきます。eps ファイルを開いてグラフをコピーし、イラストレータの zukeimoto.eps へ貼り付け、加工します。イラストレータのファイルはきちんと名前をつけ保存します。

ついでに MathType の eps のことも書いておきます。MathType の eps の場合も上と同様の扱いになります。

開いた式はグループ化されています。最初に文字の大きさをあわせるために 83 %縮小をかけます。MathType は 12 ポイントで式をつくり、イラストレータの式は少し小さめ 10 ポイントで式をつくるからです。ここは環境に合わせて適宜変更してください。

式はグループ化されていますので、少し詰めたり変形するときは白いダイレクト選択ツールで選択移動します。うまく選択できないときはグループ化を解除して、邪魔なものを背面におくるとかして選択しやすくします。しかし、式として移動することを考え再びグループ化をしておくといよいでしょう。

$$y = \sqrt{x+1}$$

MathType の Mac バージョン 3.5 ～ 3.7 の eps ファイルは上のように式全体に透明な枠がついていますのでダイレクト選択ツールで枠をとり、ルートはマスクがかけられているので、マスクをとります（このままだとルートの線が細すぎる）。上図はそのマスクを選択した段階です。この状態で Delete キーを押せばマスクがとれ、かくれていた線が現れます。5 より前の Mac バージョンではルートを線だけで描いています。MathType の ver5 ではルートを塗りと線で図形描画し、マスクはかけていません。

### (3) 平面グラフ続き

ここで基本に戻ってコマンドの説明をします。

#### (a) 関数の定義のしかた

`g[a_,b_,c_,d_] :=`

は 4 変数の関数を定義しています。関数の定義では、アンダースコアも忘れずに

(バーでなくスコアと読みます) 入れてください.

#### (b) 積の書き方

`tu` と書くと Mathematica はなにか文字の連なりと理解します. 積を表すときは `t*u` とアスタリスクを間にはさむか, `t u` と半角の空白を入れます. ただし `2t` のようなときは空けなくても大丈夫なようです.

#### (c) グラフの範囲指定などオプション

グラフィックスでは曲線はかけませんので, 変域を分割し線分で描きます. 放っておくと 15 分割で荒いので, 100 分割しています. `Ticks` は座標軸の目盛りで, これがあると販売用の図にはとても使えないのでなくします. `PlotRange->{{ , },{ , }}` は, 放っておくといいかげんところでグラフを描きますので, きちんと範囲指定をしてやります. `{ , }` の左が小さい数, 右が大きい数です. 逆にするとエラーになります. `{{ , },{ , }}` の最初が  $x$  の範囲, 後が  $y$  の範囲です. `{x,a,b}` で  $x$  の範囲を指定していても勝手な判断で一部を省略します. `PlotRange->All` で全範囲を表示すると書いた解説本もありますがそれは間違いです.

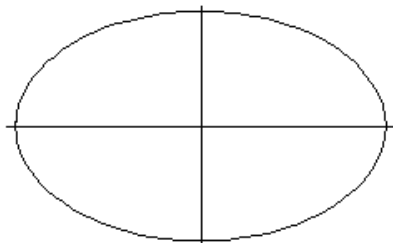
`PlotRange->{{ , },{ , }}`

でしか, きちんと表示しませんので, 必ずこれをいれましょう.

また `AspectRatio->Automatic` というのは上下左右の比を正しくしろということです. 最近のバージョンは標準で Automatic になっていて

```
ParametricPlot[{Cos[t],Sin[t]},{t,0,2Pi},
PlotPoints->100,Ticks->None]
```

としてエンター (パソコンによっては shift キーとリターンキーを押す) をすると円が描かれますが, 古いバージョンによっては



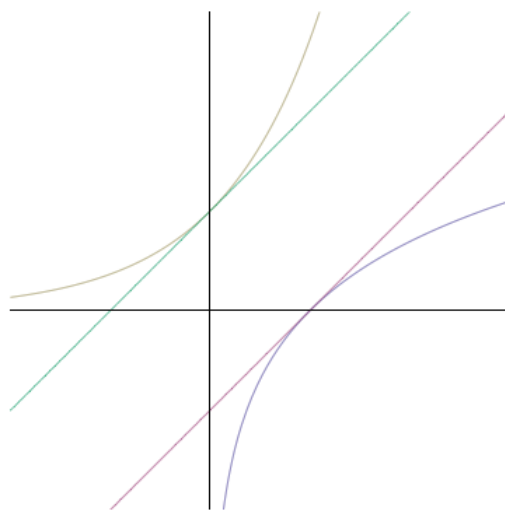
になって出てきます. 標準で黄金比にしてあるようです.

`AspectRatio->Automatic` を入れると正しくなります.

いくつかのグラフを（異なる `AspectRatio` で）別々に作っておいて、後で `Show[g1,g2]` で合体表示するときには、正しい図にならない場合がありますので注意しましょう。

(d) 定義域について

```
Plot[{Log[x], x-1, Exp[x], x+1},
     {x, -2, 3}, PlotPoints -> 100,
     PlotRange -> {{-2, 3}, {-2, 3}},
     AspectRatio -> Automatic, Ticks -> None]
```



$\log x$  は負の  $x$  では定義されませんが気にせず  $x$  の範囲を指定してグラフを描いてかまいません。

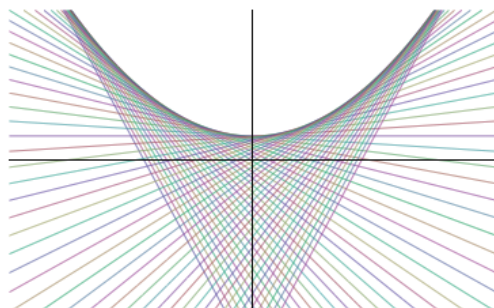
(e) Table と Release

2004 年名大後期に次の問題があります。

実数  $a$  に対して、点  $(a, 1)$  を通り傾きが  $a$  の直線と曲線  $y = |x^2 - 4|$  との交点の個数を求めよ。

$a(x-a)+1$  の  $a$  を  $-3$  から  $3$  まで  $0.1$  刻みで用意し (Table, 表にする) これをあらかじめ関数として準備しそれを一度に解放し (Release) プロットしました。

```
g1 = Plot[Release[Table[a (x - a) + 1, {a, -3, 3, 0.1}]],  
  {x, -6, 6}, PlotPoints -> 100,  
  PlotRange -> {{-6, 6}, {-6, 6}}, Ticks -> None]
```



放物線に接して動くことがわかるので包絡線を求めれば早いとわかります．解  
答は

**解答** 直線  $l_a: y = a(x-a)+1$  と曲線

$C: y = |x^2 - 4|$  の位置関係を考えるが、その前に  $l_a$  の通過範囲を調べ、 $l_a$  に安定感をもたせる。

$$y = -a^2 + ax + 1 = -\left(a - \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{x^2}{4} + 1 \leq \frac{x^2}{4} + 1$$

であるから  $l_a$  は  $y \leq \frac{x^2}{4} + 1$  を動く。また  $y = \frac{x^2}{4} + 1$

と  $l_a$  を連立させると

$$\frac{x^2}{4} + 1 = -a^2 + ax + 1 \quad \therefore \quad \left(\frac{x}{2} - a\right)^2 = 0$$

となるので  $x = 2a$  で接する。

$a > 0$  で  $l_a$  が  $(-2, 0)$  を通るとき、 $a(-2-a)+1=0$

$$a^2 + 2a - 1 = 0 \quad \therefore \quad a = -1 + \sqrt{2}$$

$a > 0$  で  $l_a$  が  $(2, 0)$  を通るとき、 $a(2-a)+1=0$

$$a^2 - 2a - 1 = 0 \quad \therefore \quad a = 1 + \sqrt{2}$$

このときの傾きは  $y = x^2 - 4$  の  $x = 2$  における接線の傾き 4 よりも小さいことに注意する。後は左右対称性に

注意し、実際に曲線  $y = \frac{x^2}{4} + 1$  の接線を動かしながら

見ていく。 $l_a$  は  $a = 0$  のときは水平で、 $C$  と 4 交点をもつ。 $a$  を大きくしていくと  $(-2, 0)$  を通る

( $a = \sqrt{2} - 1$ ) 直前まで 4 交点で  $(-2, 0)$  を通るとき

に 3 交点、その直後から 2 交点、それがしばらく続き、

$(2, 0)$  を通る ( $a = \sqrt{2} + 1$ ) ときに 1 交点、それ以後

は交点はない。

求める個数は

$$|a| < \sqrt{2} - 1$$

のとき 4,

$$|a| = \sqrt{2} - 1$$

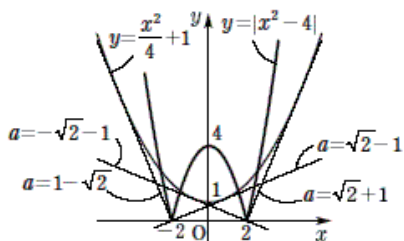
のとき 3,

$\sqrt{2} - 1 < |a| < \sqrt{2} + 1$  のとき 2,

$|a| = \sqrt{2} + 1$  のとき 1,  $|a| > \sqrt{2} + 1$  のとき 0

です。

(2) 空間図形を描く



座標空間において、点  $C(0, 0, 1)$  を中心、半径 1 の球面  $S: x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$  を考える。点  $C$  と  $S$  上の点  $P(x_1, y_1, z_1)$  (ただし  $z_1 \neq 1$ ) を通る直線が  $xy$  平面と交わる点を  $Q(u, v, 0)$  とする。  
 (1)  $u$  と  $v$  をそれぞれ  $x_1, y_1, z_1$  で表せ。  
 (2) 点  $P$  が  $S$  上の  $z < 1$  の部分を動くとき、点  $Q$  は  $xy$  平面全体を動くことを証明せよ。  
 3 点  $P$  が  $S$  上の  $z < 1$  かつ  $x = a$  ( $a$  は  $0 < a < 1$  をみたす定数) の部分を動くとき、点  $Q$  が描く図形の方程式を求めよ。(2004 名大・後期)

【解答】 (1)  $P$  には  $x_1^2 + y_1^2 + (z_1 - 1)^2 = 1$  ……①  
 という関係式が成り立つから  $Q$  を用いて  $P$  を表す。

$\vec{CP} = t\vec{CQ}$  とおけて

$$(x_1, y_1, z_1 - 1) = t(u, v, -1)$$

$$x_1 = tu, y_1 = tv, z_1 - 1 = -t \text{ ……②}$$

$t$  を消去する。 $t = 1 - z_1$  を  $x_1 = tu, y_1 = tv$  に代入し

$$x_1 = (1 - z_1)u, y_1 = (1 - z_1)v$$

$z_1 \neq 1$  より

$$u = \frac{x_1}{1 - z_1}, v = \frac{y_1}{1 - z_1}$$

(2) ②の  $x_1 = tu,$

$$y_1 = tv, z_1 = 1 - t$$

を①に代入し

$$(tu)^2 + (tv)^2 + (-t)^2 = 1$$

$$t^2(u^2 + v^2 + 1) = 1$$

$$t = 1 - z_1 > 0 \text{ なので } t = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2 + 1}}$$

$$x_1 = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2 + 1}}, y_1 = \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2 + 1}}$$

$$z_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2 + 1}}$$

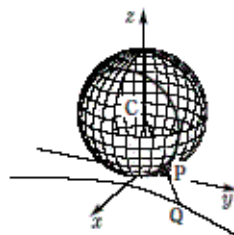
よって、任意の  $Q(u, v, 0)$  に対して、それに応じて定まる  $P$  が存在するから  $Q$  は  $xy$  平面全体を動くことができる。

$$(3) x_1 = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2 + 1}} = a \text{ のときであり、 } u > 0 \text{ の}$$

$$\text{もとで 2 乗し } \left(\frac{1}{a^2} - 1\right)u^2 - v^2 = 1$$

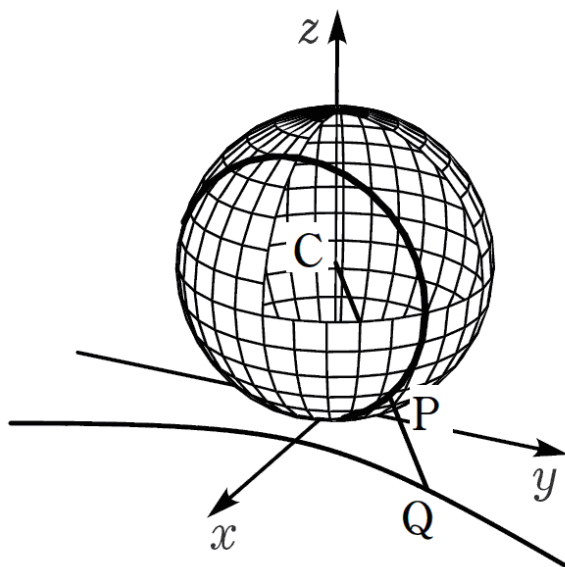
求める軌跡は双曲線の右半分

$$\left(\frac{1}{a^2} - 1\right)x^2 - y^2 = 1, x > 0, z = 0$$





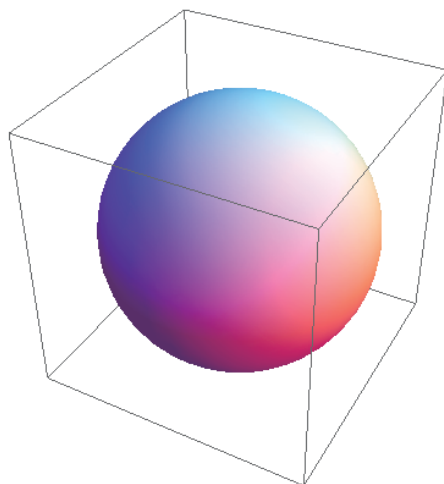
という問題があります。え、小さすぎて読めんぞって？  
 そんなのはいいの。今は図の描き方です。大きくすると下図です。



Mathematica は標準で球をつくることができます。  $(0, 0, 1)$  を中心、半径 1 の球なら次のようにします。

```
g1 = Graphics3D[Sphere[{0, 0, 1}, 1]]
```

下の球を描きます。以下エンターは面倒なので省略します。



を描きます。今は何もオプションをいれてないので、**Boxed->True** になっており、周りに箱がつきます。下では **Boxed->False** にして箱を取ります。また光の濃淡で色がついてきます。このまま白黒印刷をするとグレースケールに変換されるのですが、図はいつも白黒でつくるので、下では **Lighting->{White}** にして色をとります。

さらに

```
g2 = Graphics3D[Translate[g1,{0,0,1}]]
```

で、同じ絵を描きます。g1 をベクトル  $\{0,0,1\}$  だけ平行移動 (Translate) しているのです。Graphics3D オブジェクトと呼ばれるものはこのように名前をつけておいて変換することができます。

中心が原点でない球は平行移動をしないとできません。続けてかくなら

```
Graphics3D[Translate[Sphere[{1,32,32}],{0,0,1}]]
```

です。しかし、名大の図だと中心から直線を出すので、窓を空けておきたい。こういうのは標準では困ります。

ParametricPlot3D でやります。

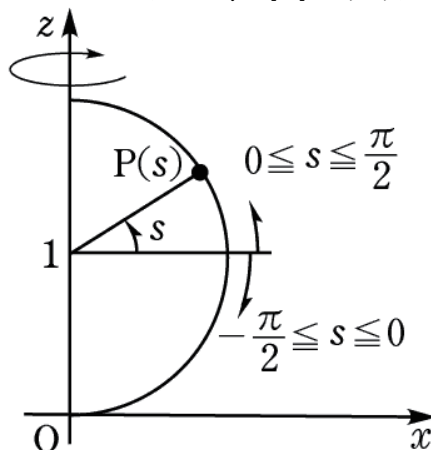
```
P[s_]:= {Cos[s],0,1+Sin[s]};
```

```
Q[s_]:= {1/2,0.85,0};
```

```
R[s_]:= {0.577/Cos[s],Tan[s],0};
```

```
U[t_]:= {{Cos[t],-Sin[t],0}, {Sin[t],Cos[t],0},{0,0,1}};
```

$V[t\_]:= \{\{\cos[t], 0, -\sin[t]\}, \{0, 1, 0\}, \{\sin[t], 0, \cos[t]\}\};$   
 $W[t\_]:= \{\{1, 0, 0\}, \{0, \cos[t], -\sin[t]\}, \{0, \sin[t], \cos[t]\}\};$   
 でエンターしてください.  $P[s]$  は球の元になる  $xz$  平面の円周上の点です.

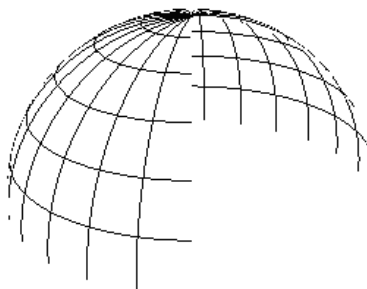


円周率は  $\pi$  で表します. 大文字から始まります. 大文字小文字の区別がありますので注意してください.  $P[s]$  の上半分,  $s$  が  $0 \leq s \leq \pi/2$  の間を  $z$  軸の周りに  $t$  が  $\pi/2 \leq t \leq 2\pi$  の範囲で回転させます. この段階で頭の中に空間的なイメージを作らないとプログラムはできません.

```

In[15]:= g1 = ParametricPlot3D[Evaluate[U[t].P[s]],
                               {s, 0, Pi/2}, {t, Pi/2, 2 Pi},
                               Axes -> None, Boxed -> False, Lighting -> {White},
                               Mesh -> {5, 18}, ViewPoint -> {2, 0, 0.8}]
  
```

Out[15]=



ここでコマンドの説明をします.

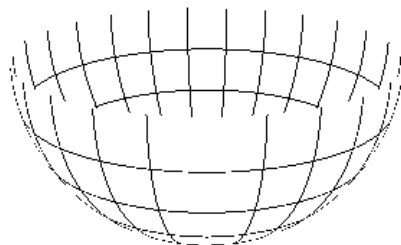
$U[t\_]:= \{\{\cos[t], -\sin[t], 0\}, \{\sin[t], \cos[t], 0\}, \{0, 0, 1\}\};$   
 は  $z$  軸まわりの回転の行列です.

$U[t].P[s]$  と間にピリオドをいれたら行列のかけ算です。

ただし、単に  $U[t].P[s]$  としても、エラーになります。この計算を **Evaluate** しないと（評価する、つまり計算の実行をする）いけないのです。これはベクトルの  $f(t)(a,b,c) + g(t)(d,e,f)$  という式の積と和の形で書く場合と同じです。逆に言えば、複雑な計算も式や行列のままで放っておいて、**Evaluate** で計算させればよいのです。

**ViewPoint** は視点ですが、実際の座標ではなく、図全体が入るボックスの最大辺の長さを 1 としたときの座標です。同様に下半分をつくり

```
g2 = ParametricPlot3D[Evaluate[U[t].P[s]],
  {s, -Pi/2, 0}, {t, 0, 2 Pi},
  Axes -> None, Boxed -> False, Lighting -> {White},
  Mesh -> {5, 24}, ViewPoint -> {2, 0, 0.8}]
```



```
Show[g1,g2,PlotRange->{{-1.1,1.1},{-1.1,1.1},{-0.1,2.1}}];
```

とすると合体して表示してくれます。

```
Q[s_]:= {1/2,0.85,0};
```

というのは平面  $x = 1/2$  と球面の交線上の 1 点を下に 1 だけ平行移動したものです。この場合は定点なので  $[s_]$  は不要ですが、用意しておいたものをいじって利用しているので、あっても困らないものはいじらないのです。これを  $x$  軸の周りに回転して空間の円を作ります。あとで上に 1 だけ平行移動して戻します。点 P, Q というのは問題文とは一致しませんので関連づけしないでください。そんなのいちいち問題に合わせてはいられません。

Mathematica がつける座標軸は適度な長さになりません。短すぎたり長すぎたりです。気に入らないので、私は空間の図を描かせるときはほとんど **Axes->None** にします。**Axes** は座標軸です。

```
g3=ParametricPlot3D[Evaluate[{0.05,0,1}+W[t].Q[s]],
```

```
{t,0,2Pi},PlotPoints->100,  
Axes->None,Boxed->False,  
Lighting->{White},ViewPoint->{2,0,0.8}];
```

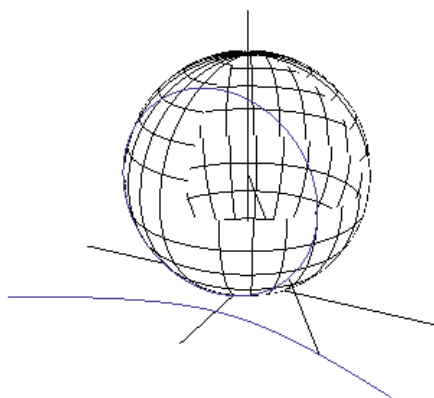
で円を描きます。ParametricPlot3D は曲面を描くときと、空間曲線を描くときに使います。平行移動量は {0,0,1} でないのか？ なんで 0.05 があるねんと思うでしょう。実は球面が正確な球面でなく、四角形で覆っているため、少し前に出してやらないと埋もれてしまうのです。これは試行錯誤で数値を決めますが、大体、ほんのちょっとです。

設問(3)の曲線も描きます。この場合は手で問題を解き、答えを出してから三角関数表示します。ルートだと目があらくなるので、できるだけ三角関数表示します。刻みの打ち方は曲面のときとは違い PlotPoints->100 で 100 分割します。それが

```
g4=ParametricPlot3D[R[s],  
{s,-0.48Pi,0.48Pi},PlotPoints->100,  
Axes->None,Boxed->False,Lighting->{White},  
ViewPoint->{2,0,0.8}];
```

です。そしてこれらを合体させます。

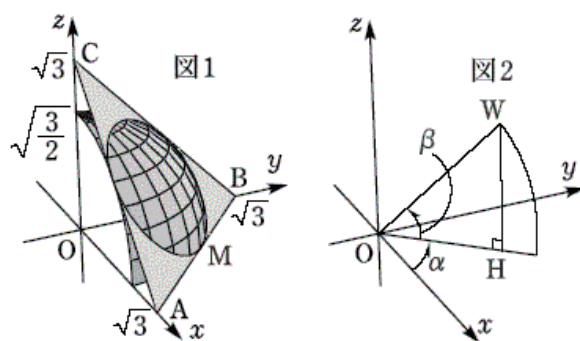
```
Show[g1, g2, g3, g4, Graphics3D[Line[{{0, 0, 1}, {0.816, 1, 0}}]],
Graphics3D[Line[{{-1.5, 0, 0}, {1.5, 0, 0}}]],
Graphics3D[Line[{{0, -2, 0}, {0, 2, 0}}]],
Graphics3D[Line[{{0, 0, 0}, {0, 0, 2.5}}]],
PlotRange -> {{-1.1, 1.1}, {-1.6, 1.6}, {-0.1, 2.3}},
ViewPoint -> {2, 1, 0.8}]
```



```
Graphics3D[Line[{{0, 0, 1}, {0.816, 1, 0}}]]
```

は自分で描いている座標軸です。これも `Graphics3D` で囲みます。括弧の数に注意してください。この座標を変え、図版にしたときに適当なものにします。それと、視点が近すぎると  $z$  軸が斜めに見えたりして、日本の図の理念に合わないので、適度に離す方がいいでしょう。

### (3) 空間の円とポリゴン



2003 年の昭和大・医の問題に出てきた図 1 の書き方を示します.

これは球面の第 1 オクタント部分 (全体の  $1/8$ ) を平面で切った図です. 方法は次の手順です.

- (a) 今度は球は回転を使わずオイラー角を使って描きます.
- (b) 三角形 ABC はポリゴンで描きます.
- (c) 球面と三角形の交線の境界が明瞭に出ませんので, 交線の円をパラメータ表示します.
- (d) 今度はあえて陰影をつけるため **Lighting->Automatic** にします.

(a) オイラー角というのは図 2 のように  $xy$  平面上で  $x$  軸から回転した角と, そこから  $z$  軸に向けて回転した角と,  $O$  との距離  $r$  で座標を記述する方法で

$OW = r$  とすると  $W(x, y, z)$  は

$$z = WH = r \sin \beta$$

$$OH = OW \cos \beta = r \cos \beta$$

$$x = OH \cos \alpha = r \cos \beta \cos \alpha$$

$$y = OH \sin \alpha = r \cos \beta \sin \alpha$$

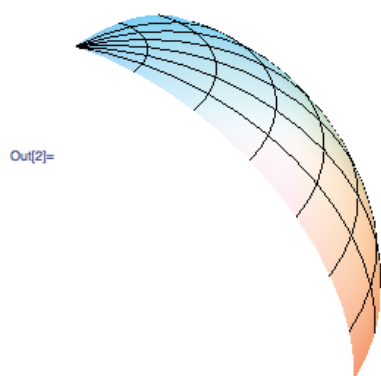
になります.

```

In[1]:= r = N[Sqrt[3 / 2]]
Out[1]= 1.22474

In[2]:= g1 = ParametricPlot3D[
  {r Cos[s] Cos[t], r Cos[s] Sin[t], r Sin[s]},
  {s, 0, Pi / 2}, {t, 0, Pi / 2},
  Axes -> None, Boxed -> False, Mesh -> 6]

```



です。私は変数はほとんど  $s$ ,  $t$ ,  $u$  ですませています。図2のオイラー角  $\alpha$  が上のコードでは  $t$  に、 $\beta$  が  $s$  になっています。

(c) 球面と三角形の交線の境界が明瞭に出ませんので、交線の円をパラメータ表示します。円の中心  $D$  は

$\text{Sqrt}[3]\{1/3, 1/3, 1/3\}$

です。  $M$  の座標は  $\text{Sqrt}[3]\{1/2, 1/2, 0\}$  で、

ベクトル  $\overrightarrow{DF} = \text{ベクトル } \overrightarrow{MD}$  は

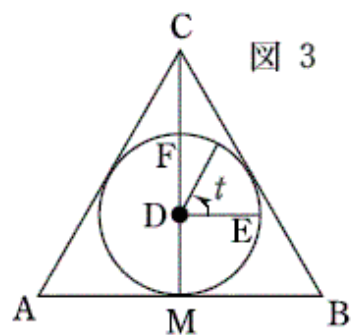
$(\text{Sqrt}[3]/6)\{-1, -1, 2\}$

です。そしてこれと長さが等しく  $AB$  に平行な

ベクトル  $DE$  が  $(1/2)\{-1, 1, 0\}$

です。これらに  $\cos t$  と  $\sin t$  をかけて空間の円周上の点をパラメータ表示します。何度も  $\cos t$ ,  $\sin t$  を書くと目がちらちらしますので、前にかけておいて **Evaluate** します。





```
In[4]:= g2 = ParametricPlot3D[
  Evaluate[Sqrt[3] {1 / 3, 1 / 3, 1 / 3} +
    (1 / 2) Cos[t] {-1, 1, 0} +
    (Sqrt[3] / 6) Sin[t] {-1, -1, 2}], {t, 0, 2 Pi},
  PlotPoints -> 100, Axes -> None, Boxed -> False];
```

で，円を描きます．

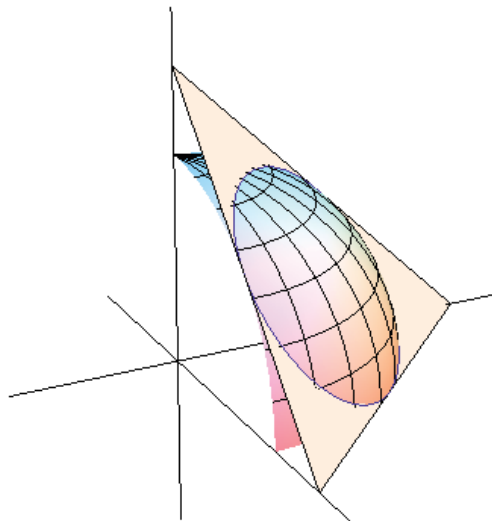
三角形 ABC の（枠だけでない内部のつまった）板をポリゴンで作ります．

```

In[5]:= Show[g1, g2,
Graphics3D[
  Polygon[{{Sqrt[3], 0, 0}, {0, Sqrt[3], 0},
    {0, 0, Sqrt[3]}}]],
Graphics3D[
  Line[{{2.2, 0, 0}, {-1, 0, 0}}]],
Graphics3D[
  Line[{{0, 2.2, 0}, {0, -1, 0}}]],
Graphics3D[
  Line[{{0, 0, 2.2}, {0, 0, -1}}]],
Boxed -> False, PlotRange -> {{-1, 2}, {-1, 2}, {-1, 2}},
ViewPoint -> {4, -2, 2}]

```

Out[5]=



この図を選んで、

「ファイル～選択範囲の形式保存～EPS」

でEPSにします。イラストレータで開いたら色つきの図を選択し

「編集～カラーを編集～グレースケールに変換」

を選びますと色が消えます。